ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

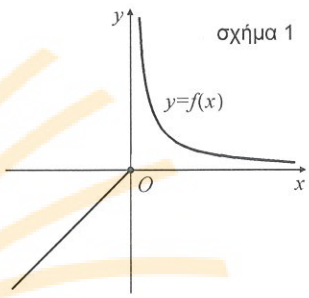
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Α2. α. Ψ

β. Αντιπαράδειγμα στο διπλανό σχήμα



σχήμα 1

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 216

Α4. α. Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = (x)' - 4(x^{-2})' = 1 + 8x^{-3} = 1 + \frac{8}{x^3}$

$= \frac{x^3+8}{x^3}, x \neq 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	↗		↘	‖	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$
ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$, την τιμή
$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3$

Β2. $f''(x) = \left(1 + \dfrac{8}{x^3}\right)' = (1)' + 8\left(x^{-3}\right)' = -24 \cdot x^{-4} = -\dfrac{24}{x^4}, \; x \neq 0$

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

άρα η f είναι κοίλη στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Δεν έχει σημεία καμπής.

Β3.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$, διότι

  $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4}{x^2} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ και $x^2 \geq 0$

  Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ $(y'y)$

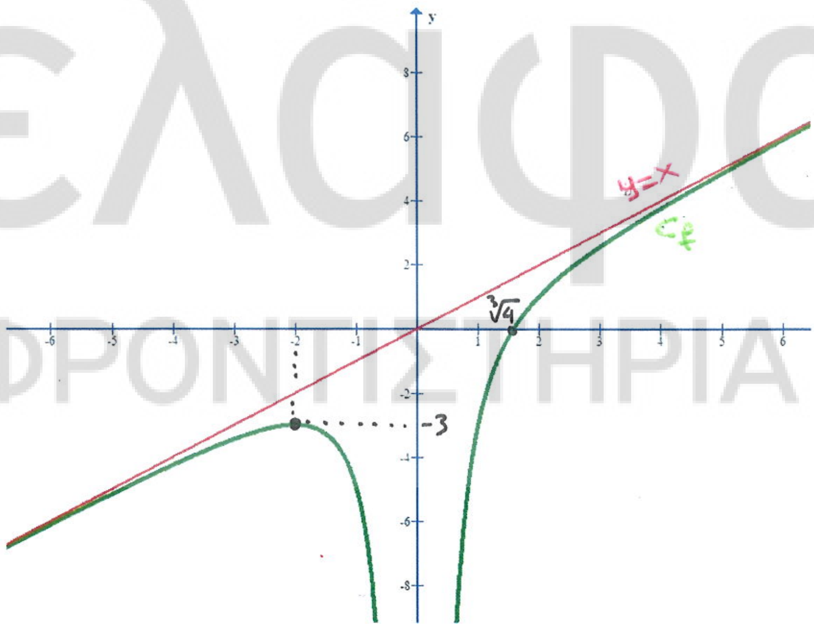
- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$

  άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-4}{x^2}\right) = 0$

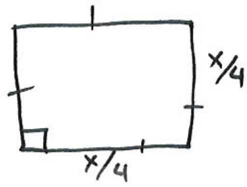
  άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν x το μήκος του σύρματος για να σχηματιστεί το τετράγωνο, τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}$ m.



$$E_{\text{τετραγώνου}} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} \text{ m}^2 \quad , \quad 0<x<8.$$

Το μήκος του σύρματος που χρησιμοποιήθηκε για τον σχηματισμό του κύκλου έχει μήκος $(8-x)$ m

μήκος κύκλου $L = 2\pi\rho \Leftrightarrow 8-x = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$ m

$$E_{\text{κύκλου}} = \pi\rho^2 = \pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \cancel{\pi}\,\frac{(8-x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}} = \frac{x^2-16x+64}{4\pi} \text{ m}^2$$

$$E(x) = E_{\text{τετραγώνου}} + E_{\text{κύκλου}}$$

$$= \frac{x^2}{16} + \frac{x^2-16x+64}{4\pi} = \frac{\pi x^2}{16\pi} + \frac{4x^2-64x+256}{16\pi}$$

$$= \frac{\pi x^2+4x^2-64x+256}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi} \quad , x\in(0,8)$$

Γ2. $$E'(x) = \frac{1}{16\pi}\cdot\left[(\pi+4)x^2-64x+256\right]' = \frac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x-64\right]$$

$$= \frac{(\pi+4)x-32}{8\pi} \quad , x\in(0,8)$$

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32=0 \Leftrightarrow (\pi+4)x=32 \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			ολ. ελ.		

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν $x = \frac{32}{\pi+4}$ m.

Όταν $x = \frac{32}{\pi+4}$ τότε:

πλευρά τετραγώνου $= \frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$ m.

διάμετρος κύκλου $= 2\rho = \cancel{2}\cdot\frac{8-x}{\cancel{2}\pi} = \frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{\frac{8\pi+\cancel{32}-\cancel{32}}{\pi+4}}{\pi}$

$$= \frac{8\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4} \text{ m}$$

Επομένως η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει ακριβώς μια λύση.

- $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$

  Η E είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο Δ_1

  $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \frac{16}{\pi}$ και $\lim\limits_{x\to \frac{32}{\pi+4}^-} E(x) = \frac{16}{\pi+4}$

  άρα $E(\Delta_1) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$

  Είναι $5 \in E(\Delta_1)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta_1$, τέτοιο ώστε $E(x_0) = 5$ m^2.

- $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$

  Η E είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο Δ_2

  $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 8^-} E(x) = 4$

  άρα $E(\Delta_2) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$

  Είναι $5 \notin E(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $E(x)=5$ δεν έχει ρίζες στο Δ_2

Επομένως μοναδική ρίζα της $E(x)=5$ το $x_0 \in \Delta_1$.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$

Δ1. $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$ και $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

$f''(x) = 0 \iff 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \iff 2e^{x-\alpha} = 2 \iff e^{x-\alpha} = 1 \iff x - \alpha = 0 \iff x = \alpha$

$f''(x) > 0 \iff 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \iff 2e^{x-\alpha} > 2 \iff e^{x-\alpha} > 1 \iff x > \alpha$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	∩	σ.κ.	∪

$f(\alpha) = 2e^{\alpha-\alpha} - \alpha^2 = 2 - \alpha^2$

μοναδικό σ.κ. $A(\alpha, 2-\alpha^2)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Δ2.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	↘		↗

- $\Delta_1 = (-\infty, \alpha)$

Η f' είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο Δ_1

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^-} (2e^{x-\alpha} - 2x) = 2 - 2\alpha$

$\Bigg\}$ $f'(\Delta_1) = (2-2\alpha, +\infty)$ $[2-2\alpha < 0$, διότι $\alpha > 1]$

Είναι $0 \in f'(\Delta_1)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1 : f'(x_1) = 0$

- $\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$

Η f' είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο Δ_2

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^{x-\alpha} \cdot \left(2 - \frac{2x}{e^{x-\alpha}}\right)\right] = +\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\alpha} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-\alpha}} = 0$

$f'(\alpha) = 2 - 2\alpha$

$\Bigg\}$ $f'(\Delta_2) = [2-2\alpha, +\infty)$

Είναι $0 \in f'(\Delta_2)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2 : f'(x_2) = 0$

- $x<x_1 \xRightarrow{f'\downarrow} f'(x)>f'(x_1) \iff f'(x)>0$
- $x_1<x\le \alpha \xRightarrow{f'\downarrow} f'(x)<f'(x_1) \iff f'(x)<0$
- $\alpha<x<x_2 \xRightarrow{f'\uparrow} f'(x)<f'(x_2) \iff f'(x)<0$
- $x>x_2 \xRightarrow{f'\uparrow} f'(x)>f'(x_2) \iff f'(x)>0$

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗		↘		↗
		Τ.Μ.		Τ.Ελ.	

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2, με $x_1<x_2$.

Δ3. Για $\alpha<x<x_2 \xRightarrow{f\downarrow} f(\alpha)>f(x)$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(1)>f(\alpha) \iff 2e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>0$

Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x)=2e^{1-x}+x^2-3$, $x\ge 1$

$g'(x)=-2e^{1-x}+2x$, $x\ge 1$

$g''(x)=2e^{1-x}+2>0$, άρα $g'\uparrow$ στο $[1,+\infty)$

$x>1 \xRightarrow{g'\uparrow} g'(x)>g'(1) \iff g'(x)>0$, για $x>1$ και g συνεχής στο $[1,+\infty)$

άρα $g\uparrow$ στο $[1,+\infty)$

$\alpha>1 \xRightarrow{g\uparrow} g(\alpha)>g(1) \iff 2e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>0$

Επομένως $f(1)>f(\alpha)$

Είναι $f(1)>f(\alpha)>f(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_2)$

δηλαδή η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

Δ4. Για $x=2$:

$f(x)=2e^{x-2}-x^2$

$f'(x)=2e^{x-2}-2x$

ε: εφαπτομένη της C_f στο $M(2,f(2))$

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2) \iff \varepsilon: y=-2x+2$

Η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε), δηλαδή $f(x) \geq -2x+2 \iff$

$$f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}, \text{ για } x \geq 2$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x=2$

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$.

Υπολογίζουμε το $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$

Θέτω $\sqrt{x-2} = u$

$x-2 = u^2$

$x = u^2+2$

$dx = 2u\,du$

x	2	3
u	0	1

$$= \int_0^1 \left[-2(u^2+2)+2\right] u \cdot 2u\,du$$

$$= \int_0^1 (-2u^2-4+2)\cdot 2u^2\,du$$

$$= \int_0^1 (-2u^2-2)\cdot 2u^2\,du$$

$$= \int_0^1 (-4u^4-4u^2)\,du$$

$$= \left[-4\frac{u^5}{5} - 4\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{15} - \frac{20}{15} = -\frac{32}{15}$$

Επομένως $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$.